FORMELSAMMLUNG STATISTIK

Michael Melcher

Gregor Laaha, Friedrich Leisch, Bernhard Spangl

Universität für Bodenkultur

Department für Raum, Landschaft und Infrastruktur
Institut für Statistik

Peter-Jordan-Straße 82, 1190 Wien

`http://statistik.boku.ac.at/`

2. März 2020

1 Beschreibende Statistik – Kenngrößen

Ausgangssituation: Stichprobe bzw. Rohdaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n ... Stichprobenumfang, x_i ... Merkmalsausprägung der i-ten Beobachtung).

1.1 Häufigkeiten & empirische Verteilungsfunktion

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_k$ die k verschiedenen Werte in der Stichprobe, so bezeichnet

$$h_j = h(a_j) = \#\{x_i : x_i = a_j\}$$

die **absoluten** und

$$f_j = f(a_j) = \frac{h_j}{n}$$

die **relativen Häufigkeiten** für $j = 1, \ldots, k$. Die **absolute kumulierte Häufigkeitsverteilung** $H(x)$ ist gegeben durch

$$H(x) = \#\{x_i : x_i \leq x\} = \sum_{j: a_j \leq x} h(a_j),$$

die **relative kumulierte Häufigkeitsverteilung** (oder **empirische Verteilungsfunktion**) $F_n(x) = \hat{F}_n(x)$ durch

$$\hat{F}_n(x) = F_n(x) = F(x) = \frac{H(x)}{n} = \sum_{j: a_j \leq x} f(a_j).$$

1.2 Ränge und Quantile

- $x_{(i)}$ in der aufsteigend sortierten Stichprobe

  $$\text{Minimum} = x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)} = \text{Maximum}$$

  bezeichnet man als i-te **Ordnungsstatistik**, den geklammerten Index nennt man den **Rang** einer Beobachtung. Bei **Bindungen**, d.h. $k \geq 2$ der x_i sind identisch, erhalten diese k Beobachtungen denselben **durchschnittlichen Rang**.

- Das $\alpha-$**Quantil** q_α ($0 < \alpha < 1$) ist definiert als

  $$\begin{aligned} q_\alpha = x_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)} = x_{(\lceil n\alpha \rceil)}, &\quad \text{wenn } n\alpha \text{ nicht ganzzahlig,} \\ q_\alpha \in [x_{(n\alpha)}, x_{(n\alpha+1)}], &\quad \text{wenn } n\alpha \text{ ganzzahlig.} \end{aligned}$$

  Dabei ist $\lfloor n\alpha \rfloor$ die zu $n\alpha$ nächstkleinere, $\lceil n\alpha \rceil$ die nächstgrößere ganze Zahl.

1.3 Lagemaße

- **arithmetisches Mittel** (**Stichprobenmittel**) $\overline{x}$ (oder $\overline{x}_n$) aus Rohdaten bzw. Häufigkeitsdaten

  $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot h(a_j) = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot f(a_j)$$

- **Stichprobenmedian** $x_{\text{med}} = \tilde{x} = q_{0.5}$

  $$x_{\text{med}} = \tilde{x} = q_{0.5} = \begin{cases} x_{((n+1)/2)} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)})/2 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

1.4 Streuungsmaße

- **empirische Standardabweichung** (Stichprobenstandardabweichung) s

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \overline{x}^2\right)}$$

  Das Quadrat s^2 bezeichnet man als **empirische Varianz** oder Stichprobenvarianz.

- **Variationskoeffizient** (*coefficient of variation*) cv

$$\mathrm{cv} = \frac{s}{\overline{x}}$$

- **MAD** (mean absolute deviation) bzw. Medmed

$$\mathrm{Medmed} = \mathrm{MAD} = \mathrm{median}_{i=1,\dots,n} \{|x_i - \tilde{x}|\}$$

- **Interquartilsabstand** IQR

$$\mathrm{IQR} = q_{0.75} - q_{0.25}$$

- **Spannweite** (Spannbreite) R

$$R = x_{(n)} - x_{(1)} = \mathrm{max}_{i=1,\dots,n}\, x_i \; - \; \mathrm{min}_{i=1,\dots,n}\, x_i$$

1.5 Beurteilung der Gestalt

- **empirische Schiefe** $\hat{\gamma}_1$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s}\right)^3$$

- **empirische Wölbung/Kurtosis** $\hat{\gamma}_2$ & **Exzeß**

$$\text{Wölbung} = \text{Kurtosis} = \hat{\gamma}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{s}\right)^4$$

$$\text{Exzess} = \hat{\gamma}_2 - 3$$

2 Normalverteilungsverfahren

2.1 Konfidenzintervalle und Tests für μ

Ausgangssituation: Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ als Realisation einer normalverteilten Zufallsgröße $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ bzw. $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ für den Fall, dass $\sigma^2 = \sigma_0^2$ bekannt ist. Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1)$ sind die Grenzen eines $(1-\alpha)$ Konfidenzintervalls (μ_u, μ_o) für den Mittelwertparameter μ bzw. die Grenzen des Annahmebereichs (c_u, c_o) für einen Mittelwerttest mit Signifikanzniveau α den folgenden Tabellen zu entnehmen.

σ	Grenzen
bekannt $\sigma = \sigma_0$	$\left.\begin{matrix}\mu_o\\\mu_u\end{matrix}\right\} = \overline{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
	$\mu_o = \overline{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$, $\mu_u = -\infty$
	$\mu_o = \infty$, $\mu_u = \overline{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$
unbekannt	$\left.\begin{matrix}\mu_o\\\mu_u\end{matrix}\right\} = \overline{x} \pm t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
	$\mu_o = \overline{x} + t_{n-1;1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}$, $\mu_u = -\infty$
	$\mu_o = \infty$, $\mu_u = \overline{x} - t_{n-1;1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}$

σ	Teststatistik t: H_0	Teststatistik t: Annahmebereich (c_u, c_o)
bekannt $\sigma = \sigma_0$	$t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	
	$\mu = \mu_0$	$\left.\begin{matrix}c_o\\c_u\end{matrix}\right\} = \pm z_{1-\alpha/2}$
	$\mu \leq \mu_0$	$c_o = z_{1-\alpha}$, $c_u = -\infty$
	$\mu \geq \mu_0$	$c_o = \infty$, $c_u = -z_{1-\alpha}$
unbekannt	$t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	
	$\mu = \mu_0$	$\left.\begin{matrix}c_o\\c_u\end{matrix}\right\} = \pm t_{n-1;1-\alpha/2}$
	$\mu \leq \mu_0$	$c_o = t_{n-1;1-\alpha}$, $c_u = -\infty$
	$\mu \geq \mu_0$	$c_o = \infty$, $c_u = -t_{n-1;1-\alpha}$

Quantile der Standardnormalverteilung sowie der t_f-Verteilungen sind in den **Tabellen A.1** und **A.2** zu finden.

2.2 Konfidenzintervalle und Tests für σ^2

Ausgangssituation: Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ als Realisation einer normalverteilten Zufallsgröße $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1)$ sind die Grenzen eines $(1-\alpha)$ Konfidenzintervalls (σ_u^2, σ_o^2) für die Varianz σ^2 bzw. die Grenzen des Annahmebereichs (c_u, c_o) für einen Varianztest mit Signifikanzniveau α den folgenden Tabellen zu entnehmen.

Grenzen	
σ_u^2	σ_o^2
$(n-1)s^2/\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$	$(n-1)s^2/\chi^2_{n-1;\alpha/2}$
0	$(n-1)s^2/\chi^2_{n-1;\alpha}$
$(n-1)s^2/\chi^2_{n-1;1-\alpha}$	∞

H_0	Teststatistik t	
	Annahmebereich (c_u, c_o)	
	c_u	c_o
	$t = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2}$	
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2_{n-1;\alpha/2}$	$\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	0	$\chi^2_{n-1;1-\alpha}$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\chi^2_{n-1;\alpha}$	∞

Quantile der χ^2_f-Verteilungen sind in **Tabelle A.3** zu finden.

2.3 Vergleich zweier Mittelwerte für unabhängige Stichproben

Ausgangssituation: zwei unabhängige Stichproben $x_1, x_2, \ldots, x_{n_X}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{n_Y}$ aus Normalverteilungen $N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ bzw. $N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ der Umfänge n_X bzw. n_Y. Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1)$ sind die Grenzen eines $(1-\alpha)$ Konfidenzintervalls $(\Delta\mu_u, \Delta\mu_o)$ für die Größe $\Delta\mu = \mu_X - \mu_Y$ bzw. die Grenzen des Annahmebereichs (c_u, c_o) für einen Test der Differenz $\Delta\mu = \mu_X - \mu_Y$ mit Signifikanzniveau α den folgenden Tabellen zu entnehmen.

σ_X und σ_Y	Grenzen
bekannt	$\left.\begin{matrix}\Delta\mu_o \\ \Delta\mu_u\end{matrix}\right\} = (\overline{x}-\overline{y}) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}$
	$\begin{aligned}\Delta\mu_o &= (\overline{x}-\overline{y}) + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} \\ \Delta\mu_u &= -\infty\end{aligned}$
	$\begin{aligned}\Delta\mu_o &= \infty \\ \Delta\mu_u &= (\overline{x}-\overline{y}) - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\end{aligned}$
unbekannt $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$	$\begin{aligned}s &= \sqrt{\frac{(n_X-1)s_X^2+(n_Y-1)s_Y^2}{n_X+n_Y-2}} \\ f &= n_X+n_Y-2\end{aligned}$
	$\left.\begin{matrix}\Delta\mu_o \\ \Delta\mu_u\end{matrix}\right\} = (\overline{x}-\overline{y}) \pm s \cdot t_{f;1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}$
	$\begin{aligned}\Delta\mu_o &= (\overline{x}-\overline{y}) + s \cdot t_{f;1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}} \\ \Delta\mu_u &= -\infty\end{aligned}$
	$\begin{aligned}\Delta\mu_o &= \infty \\ \Delta\mu_u &= (\overline{x}-\overline{y}) - s \cdot t_{f;1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\end{aligned}$
unbekannt σ_X, σ_Y beliebig	$\begin{aligned}s &= \sqrt{\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}} \\ f &= \frac{\left(\frac{s_X^2}{n_X}+\frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\left(\frac{s_X^2}{n_X}\right)^2/(n_X-1)+\left(\frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2/(n_Y-1)}\end{aligned}$
	$\left.\begin{matrix}\Delta\mu_o \\ \Delta\mu_u\end{matrix}\right\} = (\overline{x}-\overline{y}) \pm s \cdot t_{f;1-\alpha/2}$
	$\begin{aligned}\Delta\mu_o &= (\overline{x}-\overline{y}) + s \cdot t_{f;1-\alpha} \\ \Delta\mu_u &= -\infty\end{aligned}$
	$\begin{aligned}\Delta\mu_o &= \infty \\ \Delta\mu_u &= (\overline{x}-\overline{y}) - s \cdot t_{f;1-\alpha}\end{aligned}$

σ_X und σ_Y	Teststatistik t	
	H_0	Annahmebereich (c_u, c_o)
bekannt	$t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$	
	$\mu_X = \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y = 0)$	$\left.\begin{matrix} c_o \\ c_u \end{matrix}\right\} = \pm z_{1-\alpha/2}$
	$\mu_X \leq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \leq 0)$	$c_o = z_{1-\alpha}$ $c_u = -\infty$
	$\mu_X \geq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \geq 0)$	$c_o = \infty$ $c_u = -z_{1-\alpha}$
unbekannt $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$	$t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$ $s = \sqrt{\frac{(n_X-1)s_X^2 + (n_Y-1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}}$ $f = n_X + n_Y - 2$	
	$\mu_X = \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y = 0)$	$\left.\begin{matrix} c_o \\ c_u \end{matrix}\right\} = \pm t_{f;1-\alpha/2}$
	$\mu_X \leq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \leq 0)$	$c_o = t_{f;1-\alpha}$ $c_u = -\infty$
	$\mu_X \geq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \geq 0)$	$c_o = \infty$ $c_u = -t_{f;1-\alpha}$
unbekannt σ_X, σ_Y beliebig	$t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}}$ $f = \dfrac{\left(\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\left(\frac{s_X^2}{n_X}\right)^2 \Big/ (n_X-1) + \left(\frac{s_Y^2}{n_Y}\right)^2 \Big/ (n_Y-1)}$	
	$\mu_X = \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y = 0)$	$\left.\begin{matrix} c_o \\ c_u \end{matrix}\right\} = \pm t_{f;1-\alpha/2}$
	$\mu_X \leq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \leq 0)$	$c_o = t_{f;1-\alpha}$ $c_u = -\infty$
	$\mu_X \geq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \geq 0)$	$c_o = \infty$ $c_u = -t_{f;1-\alpha}$

Quantile der Standardnormalverteilung sowie der t_f-Verteilungen sind in den **Tabellen A.1** und **A.2** zu finden.

2.4 Vergleich zweier Mittelwerte für abhängige Stichproben

Ausgangssituation: Für zwei Merkmale X und Y aus Normalverteilungen $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ bzw. $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ liegen paarweise Beobachtungen (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ vor.

2.4.1 $X - Y$ normalverteilt

Grenzen der $(1-\alpha)$ Konfidenzintervalle $(\Delta\mu_u, \Delta\mu_o)$ für die Größe $\Delta\mu = \mu_X - \mu_Y$ und eine Irrtumswahrscheinlichkeit α bzw. Annahmebereiche (c_u, c_o) für Tests der Differenz $\Delta\mu = \mu_X - \mu_Y$ zum Signifikanzniveau α basierend auf den Differenzen $d_i = x_i - y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, deren Mittel $\overline{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i$ sowie deren empirischer Varianz

$$s_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2$$

sind den folgenden Tabellen zu entnehmen.

$\Delta\mu_u$	$\Delta\mu_o$
$(\overline{x}-\overline{y}) - t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$	$(\overline{x}-\overline{y}) + t_{n-1;1-\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$
$-\infty$	$(\overline{x}-\overline{y}) + t_{n-1;1-\alpha}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$
$(\overline{x}-\overline{y}) - t_{n-1;1-\alpha}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$	∞

Teststatistik t		
H_0	Annahmebereich (c_u, c_o)	
	c_u	c_o
$t = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_D/\sqrt{n}}$		
$\mu_X = \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y = 0)$	$-t_{n-1;1-\alpha/2}$	$t_{n-1;1-\alpha/2}$
$\mu_X \leq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \leq 0)$	$-\infty$	$t_{n-1;1-\alpha}$
$\mu_X \geq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \geq 0)$	$-t_{n-1;1-\alpha}$	∞

Quantile der t_f-Verteilungen sind in **Tabelle A.2** zu finden.

2.4.2 $X - Y$ beliebig verteilt

Näherungsweise $(1-\alpha)$ Konfidenzintervalle $(\Delta\mu_u, \Delta\mu_o)$ für $\Delta\mu = \mu_X - \mu_Y$ und Irrtumswahrscheinlichkeit α bzw. Annahmebereiche (c_u, c_o) der Tests zum Signifikanzniveau α für die Differenz $\Delta\mu = \mu_X - \mu_Y$ bei großen Stichprobenumfängen (Faustregel $n \geq 30$) sind – mit den gleichen Bezeichnungen wie im vorigen Abschnitt – den nachfolgenden Tabellen zu entnehmen.

$\Delta\mu_u$	$\Delta\mu_o$
$(\overline{x}-\overline{y}) - z_{1-\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$	$(\overline{x}-\overline{y}) + z_{1-\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$
$-\infty$	$(\overline{x}-\overline{y}) + z_{1-\alpha}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$
$(\overline{x}-\overline{y}) - z_{1-\alpha}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$	∞

Teststatistik t		
H_0	Annahmebereich (c_u, c_o)	
	c_u	c_o
$t = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_D/\sqrt{n}}$		
$\mu_X = \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y = 0)$	$-z_{1-\alpha/2}$	$z_{1-\alpha/2}$
$\mu_X \leq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \leq 0)$	$-\infty$	$z_{1-\alpha}$
$\mu_X \geq \mu_Y$ $(\mu_X - \mu_Y \geq 0)$	$-z_{1-\alpha}$	∞

Quantile der Standardnormalverteilung sind in **Tabelle A.1** zu finden.

2.5 Vergleich zweier Varianzen

Ausgangssituation: zwei unabhängige Stichproben $x_1, x_2, \ldots, x_{n_X}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{n_Y}$ der Umfänge n_X bzw. n_Y aus Normalverteilungen $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ bzw. $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. s_X^2 und s_Y^2 stehen für die entsprechenden empirischen Varianzen. Annahmebereiche (c_u, c_o) der Tests mit Signifikanzniveau α für einen Vergleich der Varianzen finden sich in nachfolgender Tabelle.

Teststatistik t		
H_0	Annahmebereich (c_u, c_o)	
	c_u	c_o
$t = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$		
$\sigma_X = \sigma_Y$	$F_{n_X-1, n_Y-1; \alpha/2}$	$F_{n_X-1, n_Y-1; 1-\alpha/2}$
$\sigma_X \leq \sigma_Y$	0	$F_{n_X-1, n_Y-1; 1-\alpha}$
$\sigma_X \geq \sigma_Y$	$F_{n_X-1, n_Y-1; \alpha}$	∞

Quantile der F_{f_1, f_2}-Verteilungen sind in **Tabelle A.4** zu finden.

3 Varianzanalyse

3.1 Einfache Varianzanalyse

Ausgangssituation: J_i Beobachtungen einer quantitativen Variable y zu den I Stufen eines Faktors A:

$$y_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, I;\ j = 1, \ldots, J_i)$$

und das zugehörige **Modell**

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, I;\ j = 1, \ldots, J_i)$$

mit Gesamtmittel μ, Effekten α_i und Fehlern e_{ij}. Getestet wird die Nullhypothese H_A

$$H_A:\ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I = 0$$

Der **ANOVA Table** im Falle der einfachen Varianzanalyse lautet

Ursprung der Variabilität	SS	d.f.	MS	F	p
A	$\sum_{i=1}^I J_i(\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..})^2$	$I-1$	$\frac{SS_A}{I-1}$	$\frac{MS_A}{MS_e}$	p_A
Fehler	$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \overline{y}_{i.})^2$	$\sum_{i=1}^I J_i - I$	$\frac{SS_e}{\sum_{i=1}^I J_i - I}$	–	–
Total	$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} (y_{ij} - \overline{y}_{..})^2$	$\sum_{i=1}^I J_i - 1$	–	–	–

mit den **Abkürzungen**

$$\overline{y}_{i.} = \frac{1}{J_i}\sum_{j=1}^{J_i} y_{ij} \qquad \text{und} \qquad \overline{y}_{..} = \frac{1}{\sum_{i=1}^I J_i}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} y_{ij}.$$

Testentscheidung: Unter der Nullhypothese H_A gilt

$$F = \frac{MS_A}{MS_e} \sim F_{I-1, \sum_{i=1}^I J_i - I},$$

weshalb die Nullhypothese H_A zum Signifikanzniveau α zu verwerfen ist, falls

$$F = \frac{MS_A}{MS_e} > F_{I-1, \sum_{i=1}^I J_i - I; 1-\alpha}$$

Quantile der F_{f_1,f_2}-Verteilungen sind in **Tabelle A.4** zu finden.

Die Schätzung der **Modellparameter** erfolgt mittels

$$\hat{\mu} = \overline{y}_{..} \quad \text{und} \quad \hat{\alpha}_i = \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{..}.$$

3.2 Zweifache Varianzanalyse ohne Wechselwirkungen

Im Falle der *zweifachen Varianzanalyse ohne Wechselwirkungen* liegen Beobachtungen

$$y_{ijk} \qquad (i = 1, \ldots, I;\ j = 1, \ldots, J;\ k = 1, \ldots, K)$$

zu den I bzw. J Stufen zweier Faktoren A und B mit jeweils K Wiederholungen vor. Es wird das **Modell**

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk} \qquad (i = 1, \ldots, I;\ j = 1, \ldots, J;\ k = 1, \ldots, K)$$

mit Gesamtmittel μ, Effekten α_i und β_j sowie Fehlern e_{ijk} unterstellt. Getestet werden die Nullhypothesen H_A und H_B:

$$H_A:\ \alpha_1 = \ldots = \alpha_I = 0$$
$$H_B:\ \beta_1 = \ldots = \beta_J = 0$$

Der **ANOVA Table** der zweifachen Varianzanalyse ohne Wechselwirkungen lautet

Ursprung der Variabilität	SS	d.f.	MS	F	p
A	$\sum_i JK(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})^2$	$I-1$	$\frac{SS_A}{I-1}$	$\frac{MS_A}{MS_e}$	p_A
B	$\sum_j IK(\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...})^2$	$J-1$	$\frac{SS_B}{J-1}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	p_B
Fehler	$\sum_{ijk}(y_{ijk} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...})^2$	$IJK - I - J + 1$	$\frac{SS_e}{IJK-I-J+1}$	–	–
Total	$\sum_{ijk}(y_{ijk} - \overline{y}_{...})^2$	$IJK - 1$	–	–	–

mit den **Abkürzungen**

$$\overline{y}_{...} = \frac{1}{IJK}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{i..} = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{.j.} = \frac{1}{IK}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}$$

Testentscheidung: unter den Nullhypothesen H_A bzw. H_B gilt

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_e} \sim F_{I-1,IJK-I-J+1} \qquad \text{und} \qquad F_B = \frac{MS_B}{MS_e} \sim F_{J-1,IJK-I-J+1}$$

weshalb H_A verworfen wird, falls

$$F_A > F_{I-1,IJK-I-J+1;1-\alpha}$$

und H_B verworfen wird, falls

$$F_B > F_{J-1,IJK-I-J+1;1-\alpha}.$$

Quantile der F_{f_1,f_2}-Verteilungen sind in **Tabelle A.4** zu finden.

Schätzwerte für die **Modellparameter** ergeben sich zu

$$\hat{\mu} = \overline{y}_{...} \qquad \hat{\alpha}_i = \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...} \qquad \hat{\beta}_j = \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...}$$

3.3 Zweifache Varianzanalyse mit Wechselwirkungen

Werden zusätzlich Wechselwirkungen $(\alpha\beta)_{ij}$ berücksichtigt, gelangt man zum Modell

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} \qquad (i = 1, \ldots, I;\ j = 1, \ldots, J;\ k = 1, \ldots, K)$$

mit der zusätzlichen Nullhypothese H_{AB}

$$H_{AB}:\ (\alpha\beta)_{11} = \ldots = (\alpha\beta)_{IJ} = 0.$$

Der **ANOVA Table** für die zweifache Varianzanalyse mit Wechselwirkungen lautet

Ursprung der Variabilität	SS	d.f.	MS	F	p
A	$\sum_i JK(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...})^2$	$I-1$	$\frac{SS_A}{I-1}$	$\frac{MS_A}{MS_e}$	p_A
B	$\sum_j IK(\overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...})^2$	$J-1$	$\frac{SS_B}{J-1}$	$\frac{MS_B}{MS_e}$	p_B
AB	$\sum_{ij} K(\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...})^2$	$(I-1)(J-1)$	$\frac{SS_{AB}}{(I-1)(J-1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_e}$	p_{AB}
Fehler	$\sum_{ijk}(y_{ijk} - \overline{y}_{ij.})^2$	$IJ(K-1)$	$\frac{SS_e}{IJ(K-1)}$	–	–
Total	$\sum_{ijk}(y_{ijk} - \overline{y}_{...})^2$	$IJK-1$	–	–	–

mit der **Abkürzung**

$$\overline{y}_{ij.} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}$$

Testentscheidung: unter den Nullhypothesen H_A, H_B und H_{AB} gilt

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{MS_A}{MS_e} \sim F_{I-1,IJ(K-1)} \\ F_B &= \frac{MS_B}{MS_e} \sim F_{J-1,IJ(K-1)} \\ F_{AB} &= \frac{MS_{AB}}{MS_e} \sim F_{(I-1)(J-1),IJ(K-1)}, \end{aligned}$$

weshalb H_A verworfen wird, falls

$$F_A > F_{I-1,IJ(K-1);1-\alpha},$$

H_B verworfen wird, falls

$$F_B > F_{J-1,IJ(K-1);1-\alpha}$$

und H_{AB} verworfen wird, falls

$$F_{AB} > F_{(I-1)(J-1),IJ(K-1);1-\alpha}.$$

Quantile der F_{f_1,f_2}-Verteilungen sind in **Tabelle A.4** zu finden.

Die Schätzwerte für die **Modellparameter** lauten

$$\hat{\mu} = \overline{y}_{...} \qquad \hat{\alpha}_i = \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...} \qquad \hat{\beta}_j = \overline{y}_{.j.} - \overline{y}_{...} \qquad \widehat{(\alpha\beta)}_{ij} = \overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{.j.} + \overline{y}_{...}$$

3.4 Varianztests

Ausgangssituation: I Stichproben mit Umfängen $n_1, \dots, n_I$

$$\begin{array}{lclcll} y_{11} & \dots & y_{1n_1} & \text{mit} & \mathrm{Var}(Y_{1j_1}) = \sigma_1^2 & j_1 = 1, \dots, n_1 \\ y_{21} & \dots & y_{2n_2} & \text{mit} & \mathrm{Var}(Y_{2j_2}) = \sigma_2^2 & j_2 = 1, \dots, n_2 \\ & \dots & & & \dots & \dots \\ y_{I1} & \dots & y_{In_I} & \text{mit} & \mathrm{Var}(Y_{Ij_I}) = \sigma_I^2 & j_I = 1, \dots, n_I \end{array}$$

sowie die zu testende Nullhypothese $H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_I^2$.

3.4.1 Bartlett Test

Die Testgröße b lautet

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{I} (n_i - 1) \cdot \ln \frac{s^2}{s_i^2} = \\ &= \frac{1}{c} \left[\left(\sum_{i=1}^{I} (n_i - 1) \right) \cdot \ln s^2 - \sum_{i=1}^{I} (n_i - 1) \cdot \ln s_i^2 \right] \end{aligned}$$

mit den I Gruppen-Varianzen s_i^2 und der gemittelten Stichprobenvarianz s^2

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \overline{y}_{i.})^2 \qquad\qquad s^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{I} (n_i - 1)} \sum_{i=1}^{I} (n_i - 1) s_i^2$$

sowie der Konstante c

$$c = \frac{1}{3 \cdot (I - 1)} \left(\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{I} (n_i - 1)} \right) + 1$$

Unter H_0 ist die Testgröße b annähernd χ^2–verteilt mit $I - 1$ Freiheitsgraden. H_0 wird zum Niveau α verworfen, wenn $b > \chi^2_{I-1;1-\alpha}$.

Quantile der χ^2_f-Verteilungen sind in **Tabelle A.3** zu finden.

3.4.2 Levene Test

Basierend auf den Hilfsgrößen $z_{ij} = |y_{ij} - \overline{y}_{i.}|$ und dem Gesamtstichprobenumfang $n = n_1 + \ldots + n_I$ lautet die Teststatistik w des Levene Tests

$$w = \frac{\dfrac{1}{I-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{I} n_i (\overline{z}_{i.} - \overline{z}_{..})^2}{\dfrac{1}{n-I} \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \overline{z}_{i.})^2}$$

mit den Mittelwerten

$$\overline{z}_{i.} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij} \quad \text{und} \quad \overline{z}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}$$

Unter der Nullhypothese gilt $w \sim F_{I-1,n-I}$. H_0 wird daher bei einem Test zum Niveau α verworfen, wenn $w > F_{I-1,n-I;1-\alpha}$. In einer Variante des Levene Tests verwendet man die Größen $z^*_{ij} = |y_{ij} - \tilde{y}_{i.}|$ (Stichprobenmediane anstatt der Stichprobenmittel).

Quantile der F_{f_1,f_2}-Verteilungen sind in **Tabelle A.4** zu finden.

4 Korrelations- und Regressionsanalyse

Ausgangssituation: Stichprobe paarweiser Beobachtungen $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$.

4.1 Korrelation

4.1.1 (Pearson-)Korrelationskoeffizient

- **Stichprobenkovarianz** s_{xy}:

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}\right)$$

- **Stichprobenkorrelationskoeffizient** r_{xy}:

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\overline{xy}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}} \end{aligned}$$

  wobei s_x^2 und s_y^2 die Stichprobenvarianzen der x- bzw. y-Werte bedeuten (und daher s_x und s_y die Stichprobenstandardabweichungen):

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \qquad \text{und} \qquad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$$

- **Test auf Unkorreliertheit** ($H_0:\ \rho_{X,Y}=0$): Unter H_0 ist die Testgröße

$$t = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

  verteilt nach t_{n-2}. Die Testentscheidung zum Niveau α lautet

$$|t| \left\{\begin{array}{c} > \\ \leq \end{array}\right\} t_{n-2;1-\alpha/2} \ \Rightarrow\ H_0 \left\{\begin{array}{l} \text{ablehnen} \\ \text{beibehalten} \end{array}\right.$$

  Quantile der t_f-Verteilungen sind in **Tabelle A.2** zu finden.

4.1.2 Spearman Korrelationskoeffizient

Der Spearman'sche Rangkorrelationskoeffizient r_S verwendet anstatt der Originaldaten (x_i, y_i) die **Ränge**, welche – getrennt voneinander – für die x_i und y_i bestimmt werden. Bezeichne r_i den Rang von x_i und s_i den von y_i, so ergibt sich r_S zu

$$r_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\overline{r})(s_i-\overline{s})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\overline{r})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(s_i-\overline{s})^2}}$$

wobei $\overline{r}$ und $\overline{s}$ die arithmetischen Mittel der Ränge darstellen. Diese Darstellung lässt sich erheblich vereinfachen zu

$$r_S = 1 - \frac{6\cdot\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{(n-1)\,n\,(n+1)}$$

wobei $d_i := r_i - s_i$ die **Rangdifferenz** des Beobachtungspaars i darstellt.

4.2 Einfache lineare Regressionsanalyse

- **Modell** der einfachen linearen Regression:

$$Y \mid x = a + bx + E$$

mit Fehlern $E \sim N(0, \sigma^2)$.

- **Schätzung der Regressionskoeffizienten** anhand einer Stichprobe $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ des Umfangs n:

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \qquad \text{und} \qquad \hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$$

mit der Stichprobenkovarianz s_{xy} und der Stichprobenvarianz der x-Werte s_x^2.

- Vorhergesagte/mittels der Regression **modellierte Werte** $\hat{y}$:

$$\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b} \cdot x_i$$

- **Schätzung der Fehlervarianz** σ^2:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 = s^2 &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 \\ &= \frac{n-1}{n-2}(s_y^2 - \hat{b}^2 s_x^2)\end{aligned}$$

- Beidseitiges $(1-\alpha)$ **Konfidenzintervall** für die **Fehlervarianz** σ^2:

$$\frac{(n-2)s^2}{\chi^2_{n-2;1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-2)s^2}{\chi^2_{n-2;\alpha/2}}$$

- Beidseitige $(1-\alpha)$ **Konfidenzintervalle** für **Regressionskoeffizienten**:

$$\begin{aligned}&\hat{a} \ \pm \ t_{n-2;1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{(n-1)s_x^2}} \\ &\hat{b} \ \pm \ t_{n-2;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{s_x\sqrt{n-1}}\end{aligned}$$

- **Tests** zum Niveau α für die **Regressionskoeffizienten**:
  - Test für a:

    $$H_0 : a = a_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : a \neq a_0$$

    Die Teststatistik

    $$t = \frac{\hat{a} - a_0}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{(n-1)s_x^2}}}$$

    ist unter H_0 t-verteilt mit $n-2$ Freiheitsgraden. H_0 wird verworfen, wenn $|t| > t_{n-2;1-\alpha/2}$.

- Test für b:

$$H_0 : b = b_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : b \neq b_0$$

Die Teststatistik

$$t = \frac{\hat{b} - b_0}{s/(\sqrt{n-1}s_x)}$$

ist unter H_0 t-verteilt mit $n-2$ Freiheitsgraden. H_0 wird verworfen, wenn $|t| > t_{n-2;1-\alpha/2}$.

- **Bestimmtheitsmaß** R^2:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2} = 1 - \frac{(n-2)s^2}{(n-1)s_y^2}$$

- **Konfidenz-** und **Prognoseband**:
  - $(1-\alpha)$ **Konfidenzintervall des Erwartungswerts** für einen y–Wert an der Stelle x_0:

$$y \in \left(\hat{a} + \hat{b}x_0 \pm t_{n-2;1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{(n-1)s_x^2}} \right)$$

  - $(1-\alpha)$ **Prognoseintervall** für einen y–Wert an der Stelle x_0:

$$y \in \left(\hat{a} + \hat{b}x_0 \pm t_{n-2;1-\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{(n-1)s_x^2}} \right)$$

Quantile der t_f-Verteilungen sind in **Tabelle A.2**, Quantile der χ_f^2-Verteilungen in **Tabelle A.3** zu finden.

5 Nichtparametrische Verfahren

5.1 Wilcoxon-Vorzeichenrangtest

Für eine Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und einen ein- oder zweiseitigen Test für den Median der Population $x_{0.5}$ werden die Hilfsgrößen

$$x_i' = x_i - \zeta_0$$

und anschließend die Ränge r_i der Absolutbeträge $|x_i'|$ gebildet. Tritt dabei $x_i' = 0$ auf, wird diese Beobachtung aus der Stichprobe eliminiert. Die Testgröße t^+ lautet

$$t^+ = \sum(\text{Rangzahlen der positiven } x_i') = \sum_{i=1}^{n} c_i r_i$$

mit

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i' > 0 \\ 0 & \text{falls } x_i' < 0 \end{cases}$$

Annahmebereiche (c_u, c_o) in den verschiedenen Testsituationen sind der folgenden Tabelle zu entnehmen, kritische Werte der Einstichproben Wilcoxon Verteilung w_n finden sich in **Tabelle A.5**.

H_0	Teststatistik t^+	
	Annahmebereich (c_u, c_o)	
	c_u	c_o
	$t^+ = \sum_{i=1}^{n} c_i r_i$	
$x_{0.5} = \zeta_0$	$w_{n;\alpha/2}$	$w_{n;1-\alpha/2}$
$x_{0.5} \geq \zeta_0$	$w_{n;\alpha}$	$n(n+1)/2$
$x_{0.5} \leq \zeta_0$	0	$w_{n;1-\alpha}$

5.2 Wilcoxon Rangsummentest

Ausgangssituation: zwei unabhängige Stichproben $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n_1}$ und $x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n_2}$ der Umfänge n_1 bzw. n_2 als Realisationen der Zufallsgrößen X_1 und X_2 mit Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 und den Hypothesen ($c \in \mathbb{R}$)

$$H_0: \ F_1(z) = F_2(z) \quad \text{vs.} \quad H_A: \ F_1(z) = F_2(z-c)$$

Die **Testgröße** lautet

$$w_{n_1,n_2} = \sum_{i=1}^{n_1} r_i,$$

wobei r_i die n_1 Rangzahlen der ersten Stichprobe in der vereinigten Stichprobe der Größe $n_1 + n_2$ bedeuten. Als **Entscheidungsregel** eines Tests zum Signifikanzniveau α ergibt sich

$$\left.\begin{array}{c} w_{n_1,n_2} < w_{n_1,n_2}^{2,u} \\ \text{oder} \\ w_{n_1,n_2} > w_{n_1,n_2}^{2,o} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Ablehnung von } H_0\,.$$

mit den $\alpha/2$ bzw. $(1-\alpha/2)$ Quantilen $w^{2,u}_{n_1,n_2}$ bzw. $w^{2,o}_{n_1,n_2}$ der Rangsummenverteilung W_{n_1,n_2} unter H_0. Dabei gelten

$$w^{2,u}_{n_1,n_2} = \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2} - w^{2,o}_{n_2,n_1}$$

und

$$w^{2,o}_{n_1,n_2} = \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2} - w^{2,u}_{n_2,n_1}$$

Die kritischen Werte der Zweistichproben Wilcoxon Verteilung w_{n_1,n_2} finden sich in **Tabelle A.6**.

5.3 Kruskal-Wallis Test

Ausgangssituation: Stichproben der Größen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ aus k Verteilungen: x_{ij} $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n_i)$ sowie das Testproblem

$$H_0: \text{„alle } k \text{ Verteilungen stimmen überein“}$$

gegen die Alternative

$$H_A: \text{„mindestens eine Verteilung hat eine andere Lokation“}$$

Bezeichne r_{ij} den Rang von x_{ij} in der gemeinsamen (vereinigten) Stichprobe mit $n = n_1 + \cdots + n_k$ Messwerten und für jede Gruppe i $(i = 1, \ldots, k)$ $r_{i.}$ die Summe der Rangzahlen ihrer Stichprobenwerte

$$r_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij},$$

dann ist die **Testgröße** gegeben durch

$$t = \frac{1}{b}\left[\frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{r_{i.}^2}{n_i} - 3(n+1)\right].$$

Die **Korrekturgröße** b beträgt

$$b = 1 - \frac{1}{n^3 - n}\sum_{l=1}^{g}(t_l^3 - t_l)$$

beim Vorliegen von Bindungen (sonst gilt $b = 1$). g steht für die Anzahl an verschiedenen Werten $z_1 < z_2 < \ldots < z_g$ in der vereinigten Stichprobe und t_l $(l = 1, \ldots, g)$ bezeichnet die jeweilige Anzahl der Messwerte unter den x_{ij}, die gleich z_l sind.

Die **Entscheidungsregel** lautet

$$t \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ > \end{array} \right\} h_{k;(n_1,\ldots,n_k);1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad H_0 \left\{ \begin{array}{l} \text{beibehalten} \\ \text{ablehnen} \end{array} \right.$$

unter Verwendung des $(1-\alpha)$–Quantils $h_{k;(n_1,\ldots,n_k);1-\alpha}$ der Verteilung der Prüfgröße unter H_0.

Kritische Werte der Kruskal-Wallis Verteilung $h_{k;(n_1,\ldots,n_k)}$ finden sich in **Tabelle A.7**.

5.4 Der einfache χ^2–Test

Ausgangssituation: Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ als Realisation einer Zufallsgröße X mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X sowie eine Zerlegung des Merkmalraums M_X in k disjunkte Bereiche (Klassen): $M_X = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k$. Zu untersuchen ist die Behauptung, dass P_0 die Verteilung von X ist:

$$H_0: \quad P_X = P_0$$

Die **Testgröße** lautet

$$t = \sum_{l=1}^{k} \frac{(y_{n;l} - e_l)^2}{e_l}$$

mit den beobachteten absoluten Häufigkeiten $y_{n;l}$ für die k Klassen und den unter H_0 zu erwartenden Häufigkeiten e_l ($l = 1, \dots, k$). Unter H_0 ist die Testgröße asymptotisch χ^2–verteilt mit $k-1$ Freiheitsgraden, wodurch sich als **Entscheidungsregel** ergibt

$$t \left\{ \begin{array}{c} \le \\ > \end{array} \right\} \chi^2_{k-1;1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Beibehaltung} \\ \text{Ablehnung} \end{array} \right\} \text{ von } H_0$$

Quantile der χ^2_f-Verteilungen sind in **Tabelle A.3** zu finden.

5.5 Der zusammengesetzte χ^2–Test

Ausgangssituation: gleicht der beim einfachen χ^2–Test, allerdings mit der Nullhypothese

$$H_0: \; P_X \in \{P_\theta : \; \theta \in \Theta\}.$$

Die **Testgröße** lautet

$$t = \sum_{l=1}^{k} \frac{(y_{n;l} - \hat{e}_l)^2}{\hat{e}_l},$$

wobei $\hat{e}_l = n \cdot \hat{p}_l = n \cdot P_{\hat{\theta}}(X \in K_l)$ die geschätzten erwarteten Häufigkeiten und $\hat{\theta}$ ein Schätzwert für θ ist ($l = 1, \dots, k$). Unter H_0 ist die Teststatistik asymptotisch χ^2–verteilt mit $k-s-1$ Freiheitsgraden, wobei s die Anzahl der zu schätzenden Parameter in der Nullhypothese angibt.

Als **Entscheidungsregel** ergibt sich somit für einen Test mit Signifikanzniveau α

$$t \left\{ \begin{array}{c} \le \\ > \end{array} \right\} \chi^2_{k-s-1;1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Beibehaltung} \\ \text{Ablehnung} \end{array} \right\} \text{ von } H_0$$

Quantile der χ^2_f-Verteilungen sind in **Tabelle A.3** zu finden.

5.6 Kolmogorov–Smirnov–Test

5.6.1 Einstichproben–Kolmogorov–Smirnov–Test

Ausgangssituation: Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_n$ (mit empirischer Verteilungsfunktion F_n) als Realisation einer stetigen Zufallsgröße X mit Verteilungsfunktion F_X sowie das Testproblem

$$H_0: \; F_X = F_0.$$

Die **Teststatistik** lautet

$$t = \sqrt{n}\, d_n$$

mit

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_0(x) - \hat{F}_n(x)| = \max_{i=1,\dots,n} |F_0(x_i) - \hat{F}_n(x_i)|,$$

also dem maximalen Unterschied zwischen empirischer und hypothetischer Verteilungsfunktion.

Die **Testentscheidung** für einen Test mit Signifikanzniveau α lautet

$$t \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ > \end{array} \right\} d^{(1)}_{n;1-\alpha} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} \text{Beibehaltung} \\ \text{Ablehnung} \end{array} \right\} \text{ von } H_0.$$

Kritische Werte $d^{(1)}_{n;1-\alpha}$ für den Einstichproben Kolmogorov Smirnov Test finden sich in **Tabelle A.8**.

5.6.2 Zweistichproben–Kolmogorov–Smirnov–Test

Ausgangssituation: Stichproben $x_1, x_2, \dots, x_{n_X}$ und $y_1, y_2, \dots, y_{n_Y}$ (mit empirischen Verteilungsfunktionen $\hat{F}_{X;n_X}$ und $\hat{F}_{Y;n_Y}$) als Realisationen stetiger Zufallsgrößen X und Y mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y. Das Testproblem (Signifikanzniveau α) lautet

$$H_0: \; F_X = F_Y.$$

Die Berechnung der **Teststatistik** basiert auf dem Maximalabstand zwischen den empirischen Verteilungsfunktionen

$$d_{n_X,n_Y} = \max_{t\in\mathbb{R}} |\hat{F}_{X;n_X}(t) - \hat{F}_{Y;n_Y}(t)|.$$

- Im Fall $n_X = n_Y = n$ lautet die **Testgröße**

  $$t = n\, d_{n_X,n_Y}$$

  und H_0 wird verworfen, falls $t > d^{(2)}_{n;1-\alpha}$.

- Im Fall $n_X \neq n_Y$ wählt man als Teststatistik

  $$t = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}\, d_{n_X,n_Y} = \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}}\, d_{n_X,n_Y}$$

  und verwirft H_0, wenn $t > d^{(2)}_{n_X,n_Y;1-\alpha}$.

Kritische Werte $d^{(2)}_{n;1-\alpha}$ und $d^{(2)}_{n_X,n_Y;1-\alpha}$ finden sich in den **Tabellen A.9** und **A.10**.

6 Kontingenztafeln

6.1 Kreuztabellen

Ausgangssituation: zwei betrachtete Variablen X_1 und X_2 mit Merkmalsbereichen $M_1 = \{1,\ldots,r\}$ und $M_2 = \{1,\ldots,c\}$, angeordnet in Matrixform (Tabelle 1). p_{ij} bezeichne die gemeinsame Wahrscheinlichkeit

$$p_{ij} = P(X_1 = i \wedge X_2 = j),$$

$p_{i.}$ und $p_{.j}$ die Randwahrscheinlichkeiten. Von den insgesamt n Beobachtungen werden n_{ij} Objekte mit der Ausprägung i für X_1 und j für X_2 festgestellt ($i = 1,\ldots,r$; $j = 1,\ldots,c$). Mit den Randhäufigkeiten

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{c} n_{ij} \quad \text{bzw.} \quad n_{.j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$$

ergeben sich Schätzungen für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X_1 und X_2

$$\hat{p}_{i.} = n_{i.}/n \quad \text{bzw.} \quad \hat{p}_{.j} = n_{.j}/n$$

Tabelle 1: *Schema einer Kreuztabelle*

X_2 / X_1	1	2		c	
1	p_{11} $\boxed{n_{11}}$ e_{11}	p_{12} $\boxed{n_{12}}$ e_{12}	$\cdots$	p_{1c} $\boxed{n_{1c}}$ e_{1c}	$p_{1.}$ $n_{1.}$ $np_{1.}$
2	p_{21} $\boxed{n_{21}}$ e_{21}	p_{22} $\boxed{n_{22}}$ e_{22}	$\cdots$	p_{2c} $\boxed{n_{2c}}$ e_{2c}	$p_{2.}$ $n_{2.}$ $np_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	p_{r1} $\boxed{n_{r1}}$ e_{r1}	p_{r2} $\boxed{n_{r2}}$ e_{r2}	$\cdots$	p_{rc} $\boxed{n_{rc}}$ e_{rc}	$p_{r.}$ $n_{r.}$ $np_{r.}$
	$p_{.1}$ $n_{.1}$ $np_{.1}$	$p_{.2}$ $n_{.2}$ $np_{.2}$	$\cdots$ $\cdots$	$p_{.c}$ $n_{.c}$ $np_{.c}$	n

6.2 χ^2-Test

Die **Testgröße** des χ^2-Tests lautet

$$t = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - \hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

mit den geschätzten erwarteten Häufigkeiten

$$\hat{e}_{ij} = n\,\hat{p}_{i.}\,\hat{p}_{.j} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$$

Unter H_0 (Unabhängigkeit) ist die Testgröße asymptotisch χ^2-verteilt mit $(r-1)(c-1)$ Freiheitsgraden, was zu folgender **Entscheidungsregel** für einen Test mit asymptotischem Signifikanzniveau α führt

$$t \left\{ \begin{array}{c} > \\ \leq \end{array} \right\} \chi^2_{(r-1)(c-1);1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ablehnung (“abhängig”)} \\ \text{Annahme (“unabhängig”)} \end{array} \right\} \text{von } H_0$$

Quantile der χ^2_f-Verteilungen sind in **Tabelle A.3** zu finden.

Im Fall einer 2×2–Tafel lässt sich die Teststatistik des χ^2-Tests vereinfachen zu

$$t = \frac{n\,(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1.}n_{.1}n_{2.}n_{.2}}$$

A Anhang

A.1 Quantile der Standardnormalverteilung

Tabelle A.1: $N(0,1)$–*Verteilung*; $\gamma = \Phi(z_\gamma) = \mathrm{P}(Z \leq z_\gamma)$

z_γ	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

A.2 Quantile der t-Verteilungen

Tabelle A.2: t–*Verteilung;* γ–Quantile $t_{f;\gamma}$; $\gamma = \mathrm{P}(T \leq t_{f;\gamma})$

FG f	γ					
	.750	**.900**	**.950**	**.975**	**.990**	**.995**
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.824	63.659
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
35	0.682	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	0.680	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	0.679	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
55	0.679	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
65	0.678	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654
70	0.678	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
75	0.678	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643
80	0.678	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
85	0.677	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635
90	0.677	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
95	0.677	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629
100	0.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626

A.3 Quantile der χ^2-Verteilungen

Tabelle A.3: χ^2–*Verteilung;* γ–Quantile $\chi_{f;\gamma}$ $\gamma = \mathrm{P}(X \leq \chi_{f;\gamma})$

FG	γ									
f	**.005**	**.01**	**.025**	**.05**	**.1**	**.9**	**.95**	**.975**	**.99**	**.995**
1	.000	.000	.001	.004	.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.010	.020	.051	.103	.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	.072	.115	.216	.352	.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.297	.484	.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.543	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.261	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
55	31.735	33.570	36.398	38.958	42.060	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
65	39.383	41.444	44.603	47.450	50.883	79.973	84.821	89.177	94.422	98.105
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
75	47.206	49.475	52.942	56.054	59.795	91.061	96.217	100.839	106.393	110.286
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
85	55.170	57.634	61.389	64.749	68.777	102.079	107.522	112.393	118.236	122.325
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
95	63.250	65.898	69.925	73.520	77.818	113.038	118.752	123.858	129.973	134.247
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

A.4 Quantile der F-Verteilungen

Tabelle A.4: F_{f_1,f_2}–*Verteilung;* 0.9–Quantile $F_{f_1,f_2;0.9}$

$$P(F \leq F_{f_1,f_2;0,9}) = 0.9; \quad F_{f_z,f_n;0,1} = 1/F_{f_n,f_z;0,9}$$

FG f_2 f_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	39.863	8.526	5.538	4.545	4.060	3.776	3.589	3.458	3.360
2	49.500	9.000	5.462	4.325	3.780	3.463	3.257	3.113	3.006
3	53.593	9.162	5.391	4.191	3.619	3.289	3.074	2.924	2.813
4	55.833	9.243	5.343	4.107	3.520	3.181	2.961	2.806	2.693
5	57.240	9.293	5.309	4.051	3.453	3.108	2.883	2.726	2.611
6	58.204	9.326	5.285	4.010	3.405	3.055	2.827	2.668	2.551
7	58.906	9.349	5.266	3.979	3.368	3.014	2.785	2.624	2.505
8	59.439	9.367	5.252	3.955	3.339	2.983	2.752	2.589	2.469
9	59.858	9.380	5.240	3.936	3.316	2.958	2.725	2.561	2.440
10	60.195	9.392	5.230	3.920	3.297	2.937	2.703	2.538	2.416
12	60.706	9.408	5.216	3.896	3.268	2.905	2.668	2.502	2.379
15	61.220	9.425	5.200	3.870	3.238	2.871	2.632	2.464	2.340
20	61.740	9.441	5.184	3.844	3.207	2.836	2.595	2.425	2.298
30	62.265	9.458	5.168	3.817	3.174	2.800	2.555	2.383	2.255
60	62.794	9.475	5.151	3.790	3.140	2.762	2.514	2.339	2.208
120	63.061	9.483	5.143	3.775	3.123	2.742	2.493	2.316	2.184
200	63.168	9.486	5.139	3.769	3.116	i 2.734	2.484	2.307	2.174
500	63.265	9.489	5.136	3.764	3.109	2.727	2.476	2.298	2.165

FG f_2 f_1	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	**120**	**200**	**500**
1	3.285	3.177	3.073	2.975	2.881	2.791	2.748	2.731	2.716
2	2.924	2.807	2.695	2.589	2.489	2.393	2.347	2.329	2.313
3	2.728	2.606	2.490	2.380	2.276	2.177	2.130	2.111	2.095
4	2.605	2.480	2.361	2.249	2.142	2.041	1.992	1.973	1.956
5	2.522	2.394	2.273	2.158	2.049	1.946	1.896	1.876	1.859
6	2.461	2.331	2.208	2.091	1.980	1.875	1.824	1.804	1.786
7	2.414	2.283	2.158	2.040	1.927	1.819	1.767	1.747	1.729
8	2.377	2.245	2.119	1.999	1.884	1.775	1.722	1.701	1.683
9	2.347	2.214	2.086	1.965	1.849	1.738	1.684	1.663	1.644
10	2.323	2.188	2.059	1.937	1.819	1.707	1.652	1.631	1.612
12	2.284	2.147	2.017	1.892	1.773	1.657	1.601	1.579	1.559
15	2.244	2.105	1.972	1.845	1.722	1.603	1.545	1.522	1.501
20	2.201	2.060	1.924	1.794	1.667	1.543	1.482	1.458	1.435
30	2.155	2.011	1.873	1.738	1.606	1.476	1.409	1.383	1.358
60	2.107	1.960	1.817	1.677	1.538	1.395	1.320	1.289	1.260
120	2.082	1.932	1.787	1.643	1.499	1.348	1.265	1.228	1.194
200	2.071	1.921	1.774	1.629	1.482	1.326	1.239	1.199	1.160
500	2.062	1.911	1.763	1.616	1.467	1.306	1.212	1.168	1.122

Tabelle A.4: F_{f_1,f_2}–*Verteilung;* 0.95–Quantile $F_{f_1,f_2;0.95}$

$$\mathrm{P}(F \leq F_{f_1,f_2;0{,}95}) = 0.95; \quad F_{f_z,f_n;0{,}05} = 1/F_{f_n,f_z;0{,}95}$$

FG f_2 / f_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	161.449	18.513	10.128	7.709	6.608	5.987	5.591	5.318	5.117
2	199.501	19.000	9.552	6.944	5.786	5.143	4.737	4.459	4.256
3	215.708	19.164	9.277	6.591	5.409	4.757	4.347	4.066	3.863
4	224.583	19.247	9.117	6.388	5.192	4.534	4.120	3.838	3.633
5	230.162	19.296	9.013	6.256	5.050	4.387	3.972	3.687	3.482
6	233.987	19.330	8.941	6.163	4.950	4.284	3.866	3.581	3.374
7	236.769	19.353	8.887	6.094	4.876	4.207	3.787	3.500	3.293
8	238.883	19.371	8.845	6.041	4.818	4.147	3.726	3.438	3.230
9	240.544	19.385	8.812	5.999	4.772	4.099	3.677	3.388	3.179
10	241.882	19.396	8.786	5.964	4.735	4.060	3.637	3.347	3.137
12	243.906	19.413	8.745	5.912	4.678	4.000	3.575	3.284	3.073
15	245.950	19.429	8.703	5.858	4.619	3.938	3.511	3.218	3.006
20	248.014	19.446	8.660	5.803	4.558	3.874	3.445	3.150	2.936
30	250.096	19.462	8.617	5.746	4.496	3.808	3.376	3.079	2.864
60	252.196	19.479	8.572	5.688	4.431	3.740	3.304	3.005	2.787
120	253.253	19.487	8.549	5.658	4.398	3.705	3.267	2.967	2.748
200	253.678	19.491	8.540	5.646	4.385	3.690	3.252	2.951	2.731
500	254.060	19.494	8.532	5.635	4.373	3.678	3.239	2.937	2.717

FG f_2 / f_1	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	**120**	**200**	**500**
1	4.965	4.747	4.543	4.351	4.171	4.001	3.920	3.888	3.860
2	4.103	3.885	3.682	3.493	3.316	3.150	3.072	3.041	3.014
3	3.708	3.490	3.287	3.098	2.922	2.758	2.680	2.650	2.623
4	3.478	3.259	3.056	2.866	2.690	2.525	2.447	2.417	2.390
5	3.326	3.106	2.901	2.711	2.534	2.368	2.290	2.259	2.232
6	3.217	2.996	2.790	2.599	2.421	2.254	2.175	2.144	2.117
7	3.135	2.913	2.707	2.514	2.334	2.167	2.087	2.056	2.028
8	3.072	2.849	2.641	2.447	2.266	2.097	2.016	1.985	1.957
9	3.020	2.796	2.588	2.393	2.211	2.040	1.959	1.927	1.899
10	2.978	2.753	2.544	2.348	2.165	1.993	1.910	1.878	1.850
12	2.913	2.687	2.475	2.278	2.092	1.917	1.834	1.801	1.772
15	2.845	2.617	2.403	2.203	2.015	1.836	1.750	1.717	1.686
20	2.774	2.544	2.328	2.124	1.932	1.748	1.659	1.623	1.592
30	2.700	2.466	2.247	2.039	1.841	1.649	1.554	1.516	1.482
60	2.621	2.384	2.160	1.946	1.740	1.534	1.429	1.386	1.345
120	2.580	2.341	2.114	1.896	1.683	1.467	1.352	1.302	1.255
200	2.563	2.323	2.095	1.875	1.660	1.438	1.316	1.263	1.210
500	2.548	2.307	2.078	1.856	1.637	1.409	1.280	1.221	1.159

Tabelle A.4: F_{f_1,f_2}–*Verteilung;* 0.975–Quantile $F_{f_1,f_2;0.975}$

$$\mathrm{P}(F \leq F_{f_1,f_2;0,975}) = 0.975; \quad F_{f_z,f_n;0,025} = 1/F_{f_n,f_z;0,975}$$

FG f_1 \ f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	647.789	38.506	17.443	12.218	10.007	8.813	8.073	7.571	7.209
2	799.500	39.000	16.044	10.649	8.433	7.260	6.542	6.059	5.715
3	864.163	39.166	15.439	9.979	7.764	6.599	5.890	5.416	5.078
4	899.584	39.248	15.101	9.604	7.388	6.227	5.523	5.053	4.718
5	921.811	39.298	14.885	9.364	7.146	5.988	5.285	4.817	4.484
6	937.111	39.331	14.735	9.197	6.978	5.820	5.119	4.652	4.320
7	948.217	39.355	14.624	9.074	6.853	5.695	4.995	4.529	4.197
8	956.656	39.373	14.540	8.980	6.757	5.600	4.899	4.433	4.102
9	963.217	39.387	14.473	8.905	6.681	5.523	4.823	4.357	4.026
10	968.628	39.398	14.419	8.844	6.619	5.461	4.761	4.295	3.964
12	976.708	39.415	14.337	8.751	6.525	5.366	4.666	4.200	3.868
15	984.867	39.431	14.253	8.657	6.428	5.269	4.568	4.101	3.769
20	993.103	39.448	14.167	8.560	6.329	5.168	4.467	3.999	3.667
30	1001.415	39.466	14.080	8.461	6.227	5.065	4.362	3.894	3.560
60	1009.800	39.481	13.992	8.360	6.123	4.959	4.254	3.784	3.449
120	1014.020	39.490	13.947	8.309	6.069	4.904	4.199	3.728	3.392
200	1015.713	39.493	13.929	8.289	6.048	4.882	4.176	3.705	3.368
500	1017.254	39.496	13.913	8.270	6.028	4.862	4.156	3.684	3.347

FG f_1 \ f_2	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	**120**	**200**	**500**
1	6.937	6.554	6.200	5.871	5.568	5.286	5.152	5.100	5.054
2	5.456	5.096	4.765	4.461	4.182	3.925	3.805	3.758	3.716
3	4.826	4.474	4.153	3.859	3.589	3.343	3.227	3.182	3.142
4	4.468	4.121	3.804	3.515	3.250	3.008	2.894	2.850	2.811
5	4.236	3.891	3.576	3.289	3.026	2.786	2.674	2.630	2.592
6	4.072	3.728	3.415	3.128	2.867	2.627	2.515	2.472	2.434
7	3.950	3.607	3.293	3.007	2.746	2.507	2.395	2.351	2.313
8	3.855	3.512	3.199	2.913	2.651	2.412	2.299	2.256	2.217
9	3.779	3.436	3.123	2.837	2.575	2.334	2.222	2.178	2.139
10	3.717	3.374	3.060	2.774	2.511	2.270	2.157	2.113	2.074
12	3.621	3.277	2.963	2.676	2.412	2.169	2.055	2.010	1.971
15	3.522	3.177	2.862	2.573	2.307	2.061	1.945	1.900	1.859
20	3.419	3.073	2.756	2.464	2.195	1.944	1.825	1.778	1.736
30	3.311	2.963	2.644	2.349	2.074	1.815	1.690	1.640	1.596
60	3.198	2.848	2.524	2.223	1.940	1.667	1.530	1.474	1.423
120	3.140	2.787	2.461	2.156	1.866	1.581	1.433	1.370	1.311
200	3.116	2.763	2.435	2.128	1.835	1.543	1.388	1.320	1.254
500	3.094	2.740	2.411	2.103	1.806	1.507	1.343	1.269	1.192

Tabelle A.4: F_{f_1,f_2}–*Verteilung;* 0.99–Quantile $F_{f_1,f_2;0.99}$

$$\mathrm{P}(F \leq F_{f_1,f_2;0{,}99}) = 0.99; \quad F_{f_z,f_n;0{,}01} = 1/F_{f_n,f_z;0{,}99}$$

FG f_1 \ f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	4052	98.505	34.116	21.198	16.258	13.745	12.246	11.259	10.561
2	4998	99.002	30.817	18.000	13.274	10.925	9.546	8.649	8.022
3	5402	99.169	29.457	16.694	12.060	9.779	8.451	7.591	6.992
4	5623	99.252	28.710	15.977	11.392	9.148	7.847	7.006	6.422
5	5763	99.300	28.237	15.522	10.967	8.746	7.460	6.632	6.057
6	5858	99.335	27.911	15.207	10.672	8.466	7.191	6.371	5.802
7	5927	99.359	27.672	14.976	10.455	8.260	6.993	6.178	5.613
8	5980	99.376	27.489	14.799	10.289	8.101	6.840	6.029	5.467
9	6021	99.389	27.347	14.659	10.157	7.976	6.719	5.911	5.351
10	6055	99.400	27.229	14.546	10.051	7.874	6.620	5.814	5.257
12	6105	99.416	27.052	14.374	9.888	7.718	6.469	5.667	5.111
15	6156	99.434	26.872	14.198	9.722	7.559	6.314	5.515	4.962
20	6208	99.452	26.690	14.020	9.552	7.396	6.155	5.359	4.808
30	6259	99.468	26.506	13.838	9.379	7.228	5.992	5.198	4.649
60	6312	99.484	26.316	13.652	9.202	7.056	5.824	5.032	4.483
120	6338	99.491	26.221	13.558	9.111	6.969	5.737	4.946	4.398
200	6349	99.495	26.183	13.520	9.075	6.934	5.702	4.911	4.363
500	6358	99.499	26.148	13.486	9.042	6.902	5.671	4.880	4.332

FG f_1 \ f_2	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	**120**	**200**	**500**
1	10.044	9.330	8.683	8.096	7.562	7.077	6.851	6.763	6.686
2	7.559	6.927	6.359	5.849	5.390	4.978	4.787	4.713	4.648
3	6.552	5.953	5.417	4.938	4.510	4.126	3.949	3.881	3.821
4	5.994	5.412	4.893	4.431	4.018	3.649	3.480	3.414	3.357
5	5.636	5.064	4.556	4.103	3.699	3.339	3.174	3.110	3.054
6	5.386	4.821	4.318	3.871	3.473	3.119	2.956	2.893	2.838
7	5.200	4.640	4.142	3.699	3.304	2.953	2.792	2.730	2.675
8	5.057	4.499	4.004	3.564	3.173	2.823	2.663	2.601	2.547
9	4.942	4.388	3.895	3.457	3.067	2.718	2.559	2.497	2.443
10	4.849	4.296	3.805	3.368	2.979	2.632	2.472	2.411	2.356
12	4.706	4.155	3.666	3.231	2.843	2.496	2.336	2.275	2.220
15	4.558	4.010	3.522	3.088	2.700	2.352	2.192	2.129	2.075
20	4.405	3.858	3.372	2.938	2.549	2.198	2.035	1.971	1.915
30	4.247	3.701	3.214	2.778	2.386	2.028	1.860	1.794	1.735
60	4.082	3.535	3.047	2.608	2.208	1.836	1.656	1.583	1.517
120	3.996	3.449	2.959	2.517	2.111	1.726	1.533	1.453	1.377
200	3.962	3.414	2.923	2.479	2.070	1.678	1.477	1.391	1.308
500	3.930	3.382	2.891	2.445	2.032	1.633	1.421	1.328	1.232

Tabelle A.4: F_{f_1,f_2}–*Verteilung;* 0.995–Quantile $F_{f_1,f_2;0.995}$

$$\mathrm{P}(F \leq F_{f_1,f_2;0{,}995}) = 0.995; \quad F_{f_z,f_n;0{,}005} = 1/F_{f_n,f_z;0{,}995}$$

FG f_1 \ f_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	16205	198.5	55.553	31.333	22.785	18.635	16.235	14.688	13.614
2	19991	199.0	49.803	26.284	18.314	14.544	12.404	11.042	10.107
3	21606	199.1	47.473	24.259	16.530	12.916	10.882	9.596	8.717
4	22491	199.2	46.196	23.157	15.556	12.027	10.050	8.805	7.956
5	23046	199.3	45.394	22.456	14.940	11.463	9.522	8.301	7.471
6	23428	199.3	44.838	21.975	14.513	11.073	9.155	7.952	7.134
7	23705	199.3	44.436	21.622	14.200	10.786	8.885	7.694	6.885
8	23915	199.3	44.131	21.352	13.961	10.565	8.678	7.496	6.693
9	24081	199.3	43.882	21.139	13.772	10.391	8.514	7.339	6.541
10	24215	199.4	43.692	20.967	13.618	10.250	8.380	7.211	6.417
12	24417	199.4	43.388	20.705	13.384	10.034	8.176	7.015	6.227
15	24620	199.4	43.085	20.438	13.146	9.814	7.967	6.814	6.032
20	24826	199.4	42.777	20.167	12.903	9.588	7.754	6.608	5.832
30	25034	199.4	42.467	19.891	12.656	9.358	7.534	6.396	5.625
60	25243	199.4	42.149	19.611	12.402	9.122	7.309	6.177	5.410
120	25348	199.4	41.989	19.468	12.274	9.001	7.193	6.065	5.300
200	25391	199.4	41.925	19.411	12.222	8.952	7.147	6.019	5.255
500	25429	199.4	41.867	19.359	12.175	8.908	7.104	5.978	5.215

FG f_1 \ f_2	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	**120**	**200**	**500**
1	12.826	11.754	10.798	9.944	9.180	8.495	8.179	8.057	7.950
2	9.426	8.510	7.701	6.986	6.355	5.795	5.539	5.441	5.355
3	8.081	7.226	6.476	5.818	5.239	4.729	4.497	4.408	4.330
4	7.343	6.521	5.803	5.174	4.623	4.140	3.921	3.837	3.763
5	6.872	6.071	5.372	4.762	4.228	3.760	3.548	3.467	3.396
6	6.545	5.757	5.071	4.472	3.949	3.492	3.285	3.206	3.137
7	6.303	5.525	4.847	4.257	3.742	3.291	3.087	3.010	2.941
8	6.116	5.345	4.675	4.090	3.580	3.134	2.933	2.856	2.789
9	5.968	5.202	4.536	3.956	3.450	3.008	2.808	2.732	2.665
10	5.847	5.086	4.424	3.847	3.344	2.904	2.705	2.629	2.562
12	5.661	4.906	4.250	3.678	3.179	2.742	2.544	2.468	2.402
15	5.471	4.721	4.070	3.502	3.006	2.570	2.373	2.297	2.230
20	5.274	4.530	3.883	3.318	2.823	2.387	2.188	2.112	2.044
30	5.071	4.331	3.687	3.123	2.628	2.187	1.984	1.905	1.835
60	4.859	4.123	3.480	2.916	2.415	1.962	1.747	1.661	1.584
120	4.750	4.015	3.372	2.806	2.300	1.834	1.605	1.512	1.425
200	4.706	3.971	3.328	2.760	2.251	1.779	1.541	1.442	1.346
500	4.666	3.931	3.287	2.719	2.207	1.726	1.478	1.369	1.260

A.5 Quantile der Einstichproben Wilcoxon Verteilungen

Tabelle A.5: *Wilcoxon–Vorzeichenrangtest; kritische Werte* $w_{n;\gamma}$

n	$w_{n;0.01}$	$w_{n;0.025}$	$w_{n;0.05}$	$w_{n;0.1}$	$w_{n;0.9}$	$w_{n;0.95}$	$w_{n;0.975}$	$w_{n;0.99}$
4	0	0	0	1	8	9	10	10
5	0	0	1	3	11	13	14	14
6	0	1	3	4	16	17	19	20
7	1	3	4	6	21	23	24	26
8	2	4	6	9	26	29	31	33
9	4	6	9	11	33	35	38	40
10	6	9	11	15	39	43	45	48
11	8	11	14	18	47	51	54	57
12	10	14	18	22	55	59	62	66
13	13	18	22	27	63	68	72	77
14	16	22	26	32	72	78	82	88
15	20	26	31	37	82	88	93	99
16	24	30	36	43	92	99	105	111
17	28	35	42	49	103	110	117	124
18	33	41	48	56	114	122	129	137
19	38	47	54	63	126	135	142	151
20	44	53	61	70	139	148	156	165

A.6 Quantile der Zweistichproben Wilcoxon Verteilungen

Tabelle A.6: *Wilcoxon–Rangsummentest;* γ–Quantile $w_{n_1,n_2;\gamma}$
1. Zeile: $\gamma = 0.025$; 2. Zeile: $\gamma = 0.05$; 3. Zeile: $\gamma = 0.1$

n_1 \ n_2	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	7	7
	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9
	6	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12
3	6	7	7	8	9	9	10	11	11	12	12	13	14	14
	7	8	8	9	10	11	12	12	13	14	15	16	17	17
	10	10	11	12	13	14	15	15	16	17	18	19	20	21
4	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	11	12	14	15	16	17	18	20	21	22	23	24	26	27
	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	27	28	29	30
5	16	17	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31	32	34
	17	18	20	21	23	24	26	28	29	31	33	34	36	38
	21	23	24	25	27	28	30	32	33	35	36	38	39	41
6	22	24	25	27	29	30	32	34	36	38	39	41	43	45
	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49
	28	30	32	34	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53
7	29	31	33	35	37	40	42	44	46	48	50	53	55	57
	30	33	35	37	40	42	45	47	50	52	55	57	60	62
	37	39	41	43	45	47	50	52	54	56	59	61	63	66
8	38	40	42	45	47	50	52	55	57	60	63	65	68	70
	39	42	44	47	50	53	56	59	61	64	67	70	73	76
	46	48	50	53	56	58	61	63	66	69	72	74	77	80
9	47	50	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85
	48	51	55	58	61	64	68	71	74	77	81	84	87	91
	56	59	61	64	67	70	73	76	79	82	85	89	92	95
10	57	60	63	67	70	73	76	80	83	87	90	93	97	100
	59	62	66	69	73	77	80	84	88	92	95	99	103	107
	67	70	73	76	80	83	86	90	93	97	100	104	107	111
11	68	72	75	79	83	86	90	94	98	101	105	109	113	117
	70	74	78	82	86	90	94	98	103	107	111	115	119	124
	80	83	86	90	93	97	101	105	108	112	116	120	124	128
12	81	84	88	92	96	100	105	109	113	117	121	126	130	134
	83	87	91	96	100	105	109	114	118	123	128	132	137	142
	93	96	100	104	108	112	116	120	125	129	133	137	142	146
13	94	98	102	107	111	116	120	125	129	134	139	143	148	153
	96	101	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160
	107	111	115	119	123	128	132	137	142	146	151	156	161	165
14	109	113	117	122	127	132	137	142	147	152	157	162	167	172
	110	116	121	126	131	137	142	147	153	158	164	169	175	180
	122	126	131	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185
15	124	128	133	139	144	149	154	160	165	171	176	182	187	193
	126	131	137	143	148	154	160	166	172	178	184	189	195	201

A.7 Quantile der Kruskal–Wallis Verteilungen

Tabelle A.7: *Kruskal–Wallis–Test; kritische Werte* $h_{3;(n_1,n_2,n_3);1-\alpha}$

n	n_1	n_2	n_3	$h_{3;(n_1,n_2,n_3);1-\alpha}$	
				$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$
7	1	2	4	4.50	4.82
	1	3	3	4.57	5.14
	2	2	3	4.50	4.71
8	1	2	5	4.20	5.00
	1	3	4	4.06	5.21
	2	2	4	4.46	5.13
	2	3	3	4.56	5.14
9	1	3	5	4.02	4.87
	1	4	4	4.07	4.87
	2	2	5	4.37	5.04
	2	3	4	4.51	5.40
	3	3	3	4.62	5.60
10	1	4	5	3.96	4.86
	2	3	5	4.49	5.11
	2	4	4	4.55	5.24
	3	3	4	4.70	5.72
11	1	5	5	4.04	4.91
	2	4	5	4.52	5.27
	3	3	5	4.41	5.52
	3	4	4	4.48	5.58
12	2	5	5	4.51	5.25
	3	4	5	4.52	5.63
	4	4	4	4.50	5.65
13	3	5	5	4.55	5.63
	4	4	5	4.62	5.62
14	4	5	5	4.52	5.64
15	5	5	5	4.56	5.66

A.8 Quantile der Einstichproben Kolmogorov–Smirnov–Verteilungen

Tabelle A.8: *Einstichproben Kolmogorov–Smirnov Verteilungen; kritische Werte* $d^{(1)}_{n;1-\alpha}$

n	$d^{(1)}_{n;0.80}$	$d^{(1)}_{n;0.90}$	$d^{(1)}_{n;0.95}$	$d^{(1)}_{n;0.98}$	$d^{(1)}_{n;0.99}$
5	1.00	1.14	1.26	1.40	1.50
8	1.01	1.16	1.28	1.43	1.53
10	1.02	1.17	1.29	1.45	1.55
20	1.04	1.19	1.31	1.47	1.57
40	1.05	1.20	1.33	1.49	1.59
> 40	1.08	1.23	1.36	1.52	1.63

A.9 Quantile der Zweistichproben Kolmogorov–Smirnov–Verteilungen

Tabelle A.9: *Zweistichproben Kolmogorov–Smirnov Verteilungen* ($n = n_X = n_Y$); *kritische Werte* $d^{(2)}_{n;1-\alpha}$

n	α = 0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
2	3	3			
3	4	4	4		
4	7	6	5	5	5
5	11	9	7	6	6
6	16	13	10	9	8
7	22	17	14	11	10
8	28	22	18	15	13
9	36	28	23	18	16
10		34	28	22	20
11			33	27	24
12			40	32	28
13				37	33
14					38
$n > 40$					
	$1.527\sqrt{n}$	$1.739\sqrt{n}$	$1.923\sqrt{n}$	$2.150\sqrt{n}$	$2.305\sqrt{n}$

Tabelle A.10: *Zweistichproben Kolmogorov–Smirnov Verteilungen; kritische Werte* $d^{(2)}_{n_X,n_Y;1-\alpha}$

α	$n_{(1)}$	$n_{(2)}$	$d^{(2)}_{n_{(1)},n_{(2)};1-\alpha}$
0.20	2–4	5–40	1.02
	5–15	5–40	1.03
	sonst		1.08
0.10	2–3	3–12	1.10
	4–8	5–9	1.12
	4–16	10–20	1.16
	sonst		1.23
0.05	2–4	3–15	1.22
	5–16	6–20	1.30
	sonst		1.36

Festsetzung: $n_{(1)} < n_{(2)}$